Helsingin Yliopisto
Sovelletun matematiikan
Pro Gradu
3.10.2000

Vedonlyöntiteoria

Teppo Salonen

Merkintöjä

:=	määrittelysymboli (c **:=** $a + b$ määrittelee uuden muuttujan c, jonka arvoksi tulee a + b)
<<	paljon pienempi kuin
exp(x) ja e^x	eksponenttifunktio
ln x	luonnollinen logaritmi (kantaluku e)
$\log_2 x$ ja log x	2-kantainen logaritmi
max f	funktion suurin mahdollinen arvo
lim f	raja-arvo
Df ja f'	derivaatta
D^2f ja f''	2. derivaatta
$\frac{\partial f}{\partial x}$	osittaisderivaatta
$E(X)$	odotusarvo
$D^2(X)$	varianssi
Φ	$N(0,1)$-jakauman kertymäfunktio
φ	$N(0,1)$-jakauman tiheysfunktio

Sisällys

1 JOHDANTO 3

2 MÄÄRITELMIÄ 4

2.1 ENTROPIA 4
2.2 EHDOLLINEN ENTROPIA 5
2.3 SUHTEELLINEN ENTROPIA 5
2.4 YHTEISINFORMAATIO 6
2.5 BROWNIN LIIKE 6

3 VARALLISUUDEN EKSPONENTIAALINEN KASVU 7

4 OPTIMAALISEN SIJOITUSSUUNNITELMAN MÄÄRITTÄMINEN 9

4.1 KOKO VARALLISUUDEN SIJOITTAMINEN 9
4.2 OPTIMAALISEN OSUUDEN SIJOITTAMINEN 11
4.3 OPTIMAALISEN SIJOITUKSEN APPROKSIMOINTI 17

5 SIJOITTAMISEEN LIITTYVÄT EPÄVARMUUDET 19

5.1 TODENNÄKÖISYYSARVIOIDEN TARKKUUS 19
5.2 VÄÄRÄN PANOSKOON KÄYTTÄMINEN 19
5.3 ONNEN VAIKUTUS 20
5.3.1 Todennäköisyys kiinteän summan saavuttamiselle n:n vedon aikana 21
5.3.2 Todennäköisyys hävitä osa alkupääomasta 25
5.3.3 Varallisuustilanteen todennäköisyys kiinteän kierrosmäärän jälkeen 26
5.3.4 Odotettavissa oleva aika kiinteän tavoitteen saavuttamiselle 26

6 LISÄINFORMAATION VAIKUTUS TUOTTOON 34

6.1 ESIMERKKI LISÄINFORMAATIOSTA 36

7 UTILITEETTITEORIA 39

7.1 PREFERENSSI JA UTILITEETTIFUNKTIO 39
7.2 LOGARITMINEN UTILITEETTIFUNKTIO 40
7.3 EHDOKAS RAJOITETUKSI UTILITEETTIFUNKTIOKSI 41
7.3.1 Riskien vertailua simuloimalla 45

KIRJALLISUUSLUETTELO 48

1 Johdanto

Kun vetoa lyövä pelaaja on löytänyt odotusarvoltaan tuottavat vedonlyöntikohteet, on hänen aina päätettävä kuinka suuren osan varallisuudestaan aikoo kuhunkin vetoon sijoittaa. Jos pelaaja aikoisi maksimoida tulevan varallisuutensa odotusarvon, sijoittaisi hän kaiken varallisuutensa siihen kohteeseen, jolla on suurin palautuvan rahan odotusarvo. Tällöin olisi kuitenkin erittäin mahdollista hävitä koko omaisuus yhdellä vedolla. Rajattomasti vetoja toistettaessa johtaisi tällainen uhkapelistrategia vararikkoon melkein varmasti (todennäköisyydellä yksi). Pelaaja voisi myös tavoitella jotakin kiinteää rahasummaa, joka olisi saavutettava tiettyyn aikarajaan mennessä. Tällöin olisi luonnollista määrittää panos siten, että todennäköisyys tavoitteessa onnistumiselle olisi suurin mahdollinen. Panoskoon valinta riippuu niistä tavoitteista ja kriteereistä, jotka pelaaja vedonlyöntitoiminnalleen asettaa.

Keskitytään jatkossa tilanteeseen, jossa pelaaja ei aio lopettaa pelaamista minkään kiinteän rajan kohdalla, ja sivuutetaan näin siihen liittyvät panoskoon määrityskysymykset. Tarkastellaan sen sijaan kahta eri menetelmää, joista ensimmäisessä koko varallisuutta ei koskaan sijoiteta sellaiseen vetojen yhdistelmään, jolla on mahdollista hävitä kaikki sijoitetut panokset. Näin vararikon mahdollisuus äärellisessä ajassa eliminoituu, ja panoskoon määritys voidaan perustaa varallisuuden eksponentiaaliseen kasvuun ja kasvun nopeuden maksimointiin.

Toinen käsiteltävä menetelmä on utiliteettiteorian ja utiliteettifunktion käyttö subjektiivisten preferenssien esittämiseen ja valintojen tekemiseen. On myös helppo esittää kritiikkiä kasvunopeuden maksimointistrategiaa kohtaan käyttämällä utiliteettiteorian tarjoamaa vaihtoehtoista tulkintaa po. strategialle.

2 Määritelmiä

Seuraavat määritelmät ovat Brownin liikettä lukuunottamatta peräisin teoksen "Elements of Information Theory" (Cover&Thomas) luvuista 1.1 ja 2.

2.1 Entropia

Entropialla kuvataan satunnaismuuttujan keskimääräistä epävarmuutta. Diskreetille satunnaismuuttujalle X, jolla on pistetodennäköisyysfunktio $p(x)$, määritellään entropia $H(X)$ seuraavasti,

$$H(X) = E\left(\log \frac{1}{p(X)}\right) = -\sum p(x) \log p(x).$$

Samasta suureesta käytetään myös merkintää $H(p)$. Logaritmin kantaluvuksi valitaan luku 2, jolloin entropiaa mitataan biteissä. Määritelmästä 0 log 0 = 0 seuraa, että entropiaan ei vaikuta tapahtumat, joiden todennäköisyys on nolla.

Entropia ei riipu satunnaismuuttujan havaitusta arvosta, vaan ainoastaan sen jakaumasta. Esimerkiksi kilpailun, jossa on 4 osanottajaa voittotodennäköisyyksin $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8})$, entropia on

$$H(X) = -\frac{1}{2}\log\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\log\frac{1}{4} - 2*\frac{1}{8}\log\frac{1}{8} = 1\frac{3}{4} \text{ bittiä.}$$

Entropia antaa alarajan keskimääräiselle bittien lukumäärälle, joka tarvitaan satunnaismuuttujan kuvaamiseen viiveettömällä koodilla. Viiveettömällä koodilla tarkoitamme bittijonoja, jotka voidaan tulkita tuntematta myöhempiä informaatiolähteestä saapuvia bittejä. Toisin sanoen viiveettömässä koodissa mikään koodisana ei voi olla toisen koodisanan etuliite. Mainitussa neljän osanottajan kilpailussa kilpailijat voitaisiin koodata optimaalisesti seuraavilla bittijonoilla (0,10,110,111), jolloin tieto kilpailun voittajasta veisi keskimäärin 1¾ bittiä.

Suurimmillaan entropia on satunnaismuuttujilla, jotka ovat tasaisesti jakautuneita. Neljän osanottajan kilpailussa entropia voisi olla enintään 2 bittiä, jolloin jokaisen kilpailijan voittotodennäköisyys olisi ¼. Tällöin voittaja koodattaisiin kahdella bitillä (11,10,01,00).

2.2 Ehdollinen entropia

Jos satunnaismuuttujaparilla (X,Y) on yhteispistetodennäköisyys $p(x,y)$, määritellään ehdollinen entropia $H(Y \mid X)$ seuraavasti

$$\begin{aligned} H(Y \mid X) &= \sum_x p(x) H(Y \mid X = x) \\ &= -\sum_x p(x) \sum_y p(y \mid x) \log p(y \mid x) \\ &= -\sum_x \sum_y p(x,y) \log p(y \mid x) \\ &= -\mathop{E}_{p(x,y)} \log p(Y \mid X). \end{aligned}$$

2.3 Suhteellinen entropia

Määritellään vielä suhteellinen entropia $D(\, p \,||\, q \,)$,

$$D(p \,||\, q) = \sum_x p(x) \log \frac{p(x)}{q(x)},$$

joka mittaa jakaumaoletuksesta q aiheutuvaa haittaa todellisen jakauman ollessa p. Se siis mittaa pistetodennäköisyysfunktioiden p ja q välistä "etäisyyttä". Vaikka suhteellinen entropia on aina ei-negatiivinen ja saa arvon nolla vain jos $p = q$, se ei ole aito metriikka, sillä se ei toteuta kolmioepäyhtälöä ja on epäsymmetrinen.

2.4 Yhteisinformaatio

Yhteisinformaatiolla tarkoitetaan yhden satunnaismuuttujan sisältämää informaatiota toisesta satunnaismuuttujasta. Eli kuinka paljon toisen muuttujan epävarmuus vähenee, kun toinen tiedetään. Olkoon satunnaismuuttujilla X ja Y yhteispistetodennäköisyys $p(x,y)$ ja reunatodennäköisyysfunktiot $p(x)$ ja $p(y)$. Yhteisinformaatio $I(X;Y)$ on yhteisjakauman $p(x,y)$ ja tulojakauman $p(x)p(y)$ suhteellinen entropia:

$$\begin{aligned} I(X;Y) &= \sum_x \sum_y p(x,y) \log \frac{p(x,y)}{p(x)\,p(y)} \\ &= D\big(p(x,y) \,||\, p(x)\,p(y)\big). \end{aligned}$$

2.5 Brownin liike

Satunnaismuuttujat $X(t)$, $t \geq 0$, muodostavat standardin Brownin liikkeen, jos $X(0) = 0$, $X(s + t) - X(s) \sim N(0, t)$ ja peräkkäiset lisäykset ovat riippumattomia.

$Y(t)$, $t \geq 0$, on yleinen Brownin liike, jos $Y(t) = \mu\, t + \sigma\, X(t)$, missä $X(t)$ on standardi Brownin liike. Yleiselle Brownin liikkeelle pätee $Y(t) \sim N(\mu\, t, \sigma^2\, t)$.

3 Varallisuuden eksponentiaalinen kasvu

Tämän luvun pääasiallisena lähteenä on käytetty teoksen "Elements of Information Theory" (Cover&Thomas) lukua 6.1.

Tarkastellaan hevoskilpailua, jossa toisiaan vastaan juoksee m hevosta. Merkitään hevosen numero i voittotodennäköisyyttä p_i:llä (tai vaihtoehtoisesti $p(i)$:llä), ja voittokerrointa o_i:llä (tai $o(i)$:llä). Voittokerroin määrää kuinka moninkertaisena hevoseen sijoitetun panoksen saa takaisin mikäli kyseinen hevonen voittaa kilpailun. Hevoseen i sijoitettavaa osuutta pelaajan varallisuudesta merkitään b_i:llä ($b(i)$:llä). Olkoon kaikilla hevosilla $0 < p_i < 1$, $0 \leq b_i < 1$ ja $o_i > 0$. Ja eliminoidaan vararikon mahdollisuus äärellisessä ajassa seuraavalla ehdolla: $\Sigma\, b_i = 1 \Rightarrow b_i > 0 \;\forall\; i$.

Merkitsemällä S_n:llä pelaajan varallisuutta n:n kilpailun jälkeen, saadaan

$$S_n = \prod_{k=1}^{n} S(X_k),$$

missä $S(X)$ kertoo kuinka moninkertaiseksi pelaajan varallisuus kasvaa yhdessä kilpailussa hevosen X voittaessa. Koska tällöin pelaajan varallisuus kasvaa (tai vähenee) eksponentiaalisesti, merkitään

$$S_n = 2^{n\boldsymbol{w}(\mathbf{b},\mathbf{p},\mathbf{o})},$$

missä $\boldsymbol{w}(\mathbf{b},\mathbf{p},\mathbf{o})$ on satunnaismuuttuja, joka kertoo eksponentiaalisen kasvun nopeuden vektoriparametrien $\mathbf{b}$, $\mathbf{p}$ ja $\mathbf{o}$ funktiona. 2-kantaista logaritmia käyttäen saadaan

$$\boldsymbol{w}(\mathbf{b},\mathbf{p},\mathbf{o}) = \frac{1}{n}\log S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log S(X_k).$$

Kun kilpailujen lopputulokset X_i oletetaan riippumattomiksi ja samoin jakautuneiksi ~ $p(x)$, ovat myös muuttujat log $S(X_i)$ riippumattomia ja samoin jakautuneita. Tällöin heikon suurten lukujen lain nojalla pätee seuraava stokastinen suppeneminen,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log S(X_k) \xrightarrow{P} E(\log S(X)),$$

joten tuplausnopeudeksi (doubling rate) määritellään

$$W(\mathbf{b}, \mathbf{p}, \mathbf{o}) = E\left(\log S(X)\right).$$

Määrittelemme myös *optimaalisen tuplausnopeuden* (optimum doubling rate) $W^*(\mathbf{p},\mathbf{o})$, joka on funktion $W(\mathbf{b},\mathbf{p},\mathbf{o})$ maksimiarvo $\mathbf{b}$:n suhteen, eli

$$W^*(\mathbf{p},\mathbf{o}) = \max_{\mathbf{b}} W(\mathbf{b},\mathbf{p},\mathbf{o}).$$

Koska tuplausnopeuden maksimoiva vektori $\mathbf{b}^*$ on usein hieman yksinkertaisempaa laskea luonnollista logaritmia käyttävän kasvunopeuden avulla, määrittelemme vielä

$$G(\mathbf{b}, \mathbf{p}, \mathbf{o}) = E(\ln S(X)).$$

Päättymättömässä pelissä sellainen pelaaja, joka sijoittaa aina summan, joka maksimoi tuplausnopeuden, tulee todennäköisyydellä yksi lopulta ohittamaan ja pysymään edellä kaikkia pelaajia, jotka sijoittavat minkä tahansa muun periaatteen mukaan.

4 Optimaalisen sijoitussuunnitelman määrittäminen

4.1 Koko varallisuuden sijoittaminen

Luku perustuu lähdeteoksen "Elements of Information Theory" (Cover&Thomas) lukuun 6.1.

Tarkastellaan aluksi tilannetta, jossa pelaajan täytyy sijoittaa koko varallisuutensa samaan kilpailuun siten, että sijoitettava summa jaetaan kilpailussa juoksevien hevosten kesken. Nyt siis $b_i \geq 0$ ja $\Sigma\, b_i = 1$. Hevosen i voittaessa pelaaja voittaa kyseiseen hevoseen sijoitetun panoksen takaisin o_i kertaisena, häviten muille hevosille sijoitetut panokset. Pelaajan kokonaisvarallisuus on siis kilpailun jälkeen kasvanut $b_i o_i$ kertaiseksi. Pelaajan varallisuus n:n kilpailun jälkeen on nyt

$$S_n = \prod_{k=1}^{n} S(X_k) = \prod_{k=1}^{n} b(X_k) o(X_k),$$

ja tuplausnopeus

$$W(\mathbf{b},\mathbf{p},\mathbf{o}) = E(\log S(X)) = \sum_{i=1}^{m} p_i \log b_i o_i .$$

Löytääksemme funktion $W(\mathbf{b},\mathbf{p},\mathbf{o})$ maksimikohdan $\mathbf{b}$:n suhteen ehdolla $\Sigma\, b_i = 1$, muodostamme ensin luonnollista logaritmia käyttävän kasvunopeuden Lagrange funktion

$$L(\mathbf{b},\lambda) = \sum_{i=1}^{m} p_i \ln b_i o_i + \lambda \left(\sum_{i=1}^{m} b_i - 1 \right),$$

jonka osittaisderivaattojen nollakohdista muodostuu yhtälöryhmä

$$\frac{p_i}{b_i} + \lambda = 0, \quad i = 1,...,m,$$

eli

$$b_i = -\frac{p_i}{\lambda}.$$

Ehdosta $\Sigma\, b_i = 1$ seuraa, että $\lambda = -1$ ja $b_i^* = p_i$. Todistetaan, että $\mathbf{b} = \mathbf{p}$ todellakin on optimaalinen kirjoittamalla $W(\mathbf{b},\mathbf{p},\mathbf{o})$ seuraavanlaiseen muotoon:

$$\begin{aligned} W(\mathbf{b},\mathbf{p},\mathbf{o}) &= \sum p_i \log b_i o_i \\ &= \sum p_i \log\left(\frac{b_i}{p_i} p_i o_i\right) \\ &= \sum p_i \log o_i + \sum p_i \log p_i + \sum p_i \log \frac{b_i}{p_i} \\ &= \sum p_i \log o_i - H(\mathbf{p}) - D(\mathbf{p} \,||\, \mathbf{b}) \\ &\leq \sum p_i \log o_i - H(\mathbf{p}), \end{aligned}$$

jossa yhtäsuuruus pätee vain kun $\mathbf{b} = \mathbf{p}$. Optimaalinen tuplausnopeus,

$$W^*(\mathbf{p},\mathbf{o}) = \sum p_i \log o_i - H(\mathbf{p}),$$

saavutetaan siis kun pelaaja sijoittaa kertoimista riippumatta kullekin hevoselle aina sen voittotodennäköisyyttä vastaavan osuuden varallisuudestaan.

Erikoistapauksessa, jossa jokaisen hevosen voittokerroin on sama kuin hevosten lukumäärä, eli $o_i = m$, voidaan optimaalinen tuplausnopeus kirjoittaa muotoon

$$W^*(\mathbf{p},\mathbf{o}) = \log m - H(\mathbf{p}) = D\left(\mathbf{p} \,\|\, \frac{1}{m}\right),$$

josta nähdään yhteys tuplausnopeuden ja datan tiivistyksen välillä:

$$W^*(\mathbf{p},\mathbf{o}) + H(\mathbf{p}) = \log m.$$

Eli tuplausnopeuden ja entropian summa on vakio, ja pienestä entropiasta seuraa siten suurempi tuotto.

4.2 Optimaalisen osuuden sijoittaminen

Tämän luvun on tärkeimmät lähteet ovat "A New Interpretation of Information Rate" (Kelly), "Elements of Information Theory" (Cover&Thomas) sekä "The Kelly Criterion in Blackjack, Sports Betting, and the Stock Market" (Thorp).

Luovutaan jatkossa rajoituksesta, että pelaajan täytyisi aina sijoittaa koko varallisuutensa kilpailuun. Säästöön jää tällöin osuus 1 - Σ b_i, ja varallisuus kasvaa

$$S(X) = 1 - \sum b_i + b(X)o(X)$$

kertaiseksi jokaisen kilpailun jälkeen.

Oletetaan, että vedonvälittäjä toimii ilman etumarginaalia, eli antaa vedonlyöntikertoimet siten, että $\sum (1/o_i) = \sum r_i = 1$. Merkitään siis $r_i = 1/o_i$. Nyt kuitenkin kokonaan pelaamatta jättämisestä seuraisi sama lopputulos kuin pelaamalla $b_i = r_i$ kaikille hevosille. Kilpailun lopputuloksesta riippumatta pelaaja voittaisi aina panoksensa takaisin. Samalla tavalla mikä tahansa pelaajan säästöön jättämä summa voitaisiin yhtä hyvin sijoittaa hevosille lukujen r_i mukaisissa suhteissa. Tässä tapauksessa rajoitus Σ b_i = 1 ei siis vaikuta tuloksiin, ja aiemmin saatu tulos $\mathbf{b}^* = \mathbf{p}$ optimaaliselle sijoitukselle on edelleen voimassa (Cover&Thomas).

Ajatellaan seuraavaksi tilannetta, jossa pelaajalla on välitön etu puolellaan, eli $\sum r_i < 1$. Nyt pelaajan ei tarvitsisi ajatella lainkaan todennäköisyyksiä voidakseen tehdä voittoa, sillä sijoittamalla hevosille osuudet

$$b_j = \frac{r_j}{\sum_{i=1}^{m} r_i},$$

kasvaa hänen varallisuutensa kilpailun tuloksesta riippumatta

$$S(X) = \frac{1}{\sum r_i} > 1$$

kertaiseksi. Mutta vaikka tämä sijoitusstrategia onkin täysin riskitön, se ei maksimoi tuplausnopeutta. Optimaalinen sijoitus saadaan aiemmasta tuloksestamme $\mathbf{b}^* = \mathbf{p}$, sillä tällaisessa tilanteessa kannattaa tietysti sijoittaa koko varallisuus, eikä siten rajoitus $\Sigma\, b_i = 1$ vaikuta. Käytännössä yksikään vedonvälittäjä tuskin antaisi mihinkään kilpailuun varman voiton mahdollistavia kertoimia, mutta useamman vedonvälittäjän arvioiden mennessä ristiin, voi tällaisiakin tilanteita syntyä.

Keskitytään seuraavaksi tutkimaan realistisempia tilanteita, joissa $\sum r_i > 1$. Enää pelaajan ei kannata sijoittaa jokaiseen kilpailussa juoksevaan hevoseen, eikä siten kannata myöskään sijoittaa kaikkea varallisuutta yhteen kilpailuun. Ottamalla käyttöön merkintä $b(0)$ säästöön jäävälle varallisuudelle, pelaajan varallisuudeksi n:n kilpailun jälkeen saadaan

$$S_n = \prod_{k=1}^{n} \big(b(0) + b(X_k)o(X_k)\big),$$

ja tuplausnopeudeksi

$$W(\mathbf{b},\mathbf{p},\mathbf{o}) = \sum_{i=1}^{m} p_i \log\bigl(b(0) + b_i o_i\bigr),$$

joka maksimoidaan rajoituksella

$$b(0) + \sum_{i=1}^{m} b_i = 1.$$

Olkoon D niiden hevosten joukko, joihin pelaaja sijoittaa, eli joilla $b_i > 0$, sekä joukko D' ne hevoset, joilla $b_i = 0$. Muodostetaan luonnollista logaritmia käyttävän kasvunopeuden Lagrange funktio

$$L(\mathbf{b},\lambda) = \sum_{i=1}^{m} p_i \ln\bigl(b(0) + b_i o_i\bigr) + \lambda\left(b(0) + \sum_{i=1}^{m} b_i - 1\right),$$

ja sen osittaisderivaattojen nollakohdat

$$\frac{\partial L}{\partial b_i} = \frac{p_i o_i}{b(0) + b_i o_i} + \lambda = 0, \qquad \text{kun } i \in \text{D}$$
$$\frac{\partial L}{\partial b(0)} = \sum_{j=1}^{m} \frac{p_j}{b(0) + b_j o_j} + \lambda = 0.$$

Saadut yhtälöt ja rajoitus $b(0) + \Sigma b_i = 1$ johtavat tulokseen

$$\lambda = -1,$$
$$b(0) = \frac{1-p}{1-r}, \quad \text{missä} \quad p = \sum_{i \in D} p_i, \quad r = \sum_{i \in D} r_i = \sum_{i \in D} \frac{1}{o_i},$$
$$b_i = p_i - \frac{b(0)}{o_i}, \qquad \text{kun i} \in \text{D}.$$

Optimaalinen **b** on siis

$$b_j^* = p_j - \frac{1 - \sum_{i \in D} p_i}{\left(1 - \sum_{i \in D} \frac{1}{o_i}\right) o_j}, \quad j \in \mathrm{D},$$

ja joukko D saadaan määrättyä seuraavien tarkastelujen avulla (Kelly). Kun $i \notin$ D, Lagrange funktion osittaisderivaatoille pätee epäyhtälö

$$\frac{\partial L}{\partial b_i} = \frac{p_i o_i}{b(0)} + \lambda \leq 0, \quad i \notin \mathrm{D},$$

joka voidaan kirjoittaa muotoon

$$p_i o_i \leq b(0) = \frac{1-p}{1-r}, \quad i \notin D.$$

Permutoidaan indeksit siten, että $p_i o_i \geq p_{i+1} o_{i+1}$, jolloin joukko D sisältää kaikki indeksit $i \leq t$, missä t on positiivinen kokonaisluku tai nolla. Ja tutkitaan osamäärää

$$F(t) = \frac{1 - P(t)}{1 - R(t)},$$

missä

$$P(t) = \sum_{i=1}^{t} p_i, \quad R(t) = \sum_{i=1}^{t} r_i.$$

Jos nyt $p_1 o_1 < 1$, kasvaa $F(t)$ parametrin t mukana, kunnes $R(t) \geq 1$. Tällöin arvo $t = 0$ toteuttaa vaaditut ehdot, ja joukko D on tyhjä. Jos taas $p_1 o_1 > 1$, vähenee $F(t)$ kunnes $p_{t+1} o_{t+1} < F(t)$ tai $R(t) \geq 1$. Ensin mainitun tapahtuessa $F(t+1) > F(t)$, ja $F(t)$ kasvaa kunnes $R(t) \geq 1$. Joka tapauksessa vaaditut ehdot toteuttava t saadaan valitsemalla pienin

niistä t:n arvoista, jotka antavat osamäärälle $F(t)$ pienimmän positiivisen arvon. Joukko D siis määräytyy siten yksikäsitteisesti ehdoista

$$\begin{aligned} & r < 1, \\ & p_i o_i > \frac{1-p}{1-r}, \quad \text{kun } i \in D, \\ & p_i o_i \leq \frac{1-p}{1-r}, \quad \text{kun } i \notin D. \end{aligned}$$

Koko tuplausnopeuden maksimointiprosessi voidaan esittää seuraavanlaisen algoritmin muodossa:

1. Permutoidaan indeksit siten, että $p_i o_i \geq p_{i+1} o_{i+1}$.
2. Etsitään pienin sellainen indeksi t, joka antaa pienimmän positiivisen arvon lausekkeelle

$$b(0) = \frac{1 - \sum_{i=1}^{t} p_i}{1 - \sum_{i=1}^{t} r_i}.$$

3. Asetetaan $b_i = max\ (p_i - b(0)/o_i, 0)$, missä $max\ (x,y)$ tarkoittaa suurempaa luvuista x ja y. (Tällöin $\Sigma\ b_i = 1 - b(0)$).

Optimaalinen tuplausnopeus on näin

$$W^*(\mathbf{p},\mathbf{o}) = \sum_{i=1}^{t} p_i \log(p_i o_i) + \left(1 - \sum_{i=1}^{t} p_i\right) \log \frac{1 - \sum_{i=1}^{t} p_i}{1 - \sum_{i=1}^{t} \frac{1}{o_i}}.$$

Mielenkiintoinen havainto on, että b_i^* voi olla positiivinen sellaisellakin hevosella, jolla $p_i o_i < 1$. Eli odotusarvoltaan tappiolliseenkin hevoseen sijoittaminen voi joskus olla

kannattavaa, koska suurempi voittotodennäköisyys sallii pienemmän $b(0)$:n, ja erityisesti sijoitus saman lähdön tuottavampiin hevosiin on tällöin suurempi.

Jos kilpailusta valitaan vain yksi hevonen johon sijoitetaan, saadaan optimaaliselle panoskoolle kaava

$$b_i^* = \frac{p_i o_i - 1}{o_i - 1}.$$

Kun kahdesta samaan aikaan juostavasta kilpailusta valitaan molemmista yksi pelattava hevonen, ovat näiden vetojen tulokset yleensä riippumattomia, jolloin kasvunopeudeksi saadaan (Thorp)

$$\begin{aligned} G(\mathbf{b},\mathbf{p},\mathbf{o}) = {} & p_1 p_2 \ln\big(1 + b_1(o_1 - 1) + b_2(o_2 - 1)\big) + \\ & p_1(1 - p_2)\ln\big(1 + b_1(o_1 - 1) - b_2\big) + \\ & (1 - p_1)p_2 \ln\big(1 - b_1 + b_2(o_2 - 1)\big) + \\ & (1 - p_1)(1 - p_2)\ln\big(1 - b_1 - b_2\big). \end{aligned}$$

Jos molempien hevosten kertoimet ovat $o_1 = o_2 = 2$, yksinkertaistuu kasvunopeus muotoon

$$\begin{aligned} G(\mathbf{b},\mathbf{p},\mathbf{o}) = {} & p_1 p_2 \ln\big(1 + b_1 + b_2\big) + p_1(1 - p_2)\ln\big(1 + b_1 - b_2\big) + \\ & (1 - p_1)p_2 \ln\big(1 - b_1 + b_2\big) + (1 - p_1)(1 - p_2)\ln\big(1 - b_1 - b_2\big), \end{aligned}$$

jonka osittaisderivaattojen nollakohtien avulla on helppo ratkaista optimaaliset panokset molemmille hevosille:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G}{\partial b_1} = \dfrac{p_1 p_2}{1 + b_1 + b_2} + \dfrac{p_1(1 - p_2)}{1 + b_1 - b_2} - \dfrac{(1 - p_1)p_2}{1 - b_1 + b_2} - \dfrac{(1 - p_1)(1 - p_2)}{1 - b_1 - b_2} = 0 \\ \dfrac{\partial G}{\partial b_2} = \dfrac{p_1 p_2}{1 + b_1 + b_2} - \dfrac{p_1(1 - p_2)}{1 + b_1 - b_2} + \dfrac{(1 - p_1)p_2}{1 - b_1 + b_2} - \dfrac{(1 - p_1)(1 - p_2)}{1 - b_1 - b_2} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_1^* = \dfrac{m_1\left(1-m_2^2\right)}{1-m_1^2 m_2^2} \\ b_2^* = \dfrac{m_2\left(1-m_1^2\right)}{1-m_1^2 m_2^2}, \end{cases}$$

missä $m_i = 2p_i - 1$.

4.3 Optimaalisen sijoituksen approksimointi

Mikäli pelaaja lyö hevoskilpailuun vedon, joka antaa voiton mahdollisesti useammallakin lopputuloksella kuin vain yhdellä, eri voittokertoimin tosin, saadaan varallisuudeksi n:n kilpailun jälkeen

$$S_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + bV(X_k)\right),$$

missä

$$V(i) = V_i = \begin{cases} o_i - 1, \text{kun } i \in \text{D} \\ -1 \quad , \text{kun } i \notin \text{D}, \end{cases}$$

D:n ollessa niiden hevosten joukko, joilla pelaaja voittaa. Luonnollista logaritmia käyttäväksi kasvunopeudeksi tulee tällöin

$$G(b, \mathbf{p}, \mathbf{o}) = \sum_{i=1}^{m} p_i \ln\left(1 + bV_i\right).$$

Kun bV_i:t ovat pieniä, saadaan logaritmin Taylor'in kehitelmän, $\ln(1+x) \approx x - \dfrac{x^2}{2}$, avulla kasvunopeudelle approksimaatio

$$
\begin{aligned}
G(b,\mathbf{p},\mathbf{o}) &\approx \sum_{i=1}^{m} p_i \left(bV_i - \frac{b^2 V_i^{\,2}}{2} \right) \\
&= b\sum_{i=1}^{m} p_i V_i - \frac{b^2}{2} \sum_{i=1}^{m} p_i V_i^{\,2} \\
&= bE(V) - \frac{b^2}{2} E\left(V^2\right).
\end{aligned}
$$

Derivoimalla tämä saadaan optimaaliselle panoskoolle approksimaatio

$$b^* \approx \frac{E(V)}{E(V^2)},$$

eli voiton odotusarvo jaettuna voiton neliön odotusarvolla. Ja kun $E(V)$ on pieni, saadaan likiarvon $E(V^2) \approx D^2(V)$ avulla vielä

$$b^* \approx \frac{E(V)}{D^2(V)},$$

eli optimaalinen panoskoko on likimain voiton odotusarvon ja varianssin suhde. Näin saatu arvio on hyvä jos $E(V) << D^2(V)$, mikä onkin varsin yleinen tilanne.

5 Sijoittamiseen liittyvät epävarmuudet

5.1 Todennäköisyysarvioiden tarkkuus

Luku perustuu teoksen "Elements of Information Theory" (Cover&Thomas) luvun 6.1 esimerkkiin 6.1.1.

Palataan tilanteeseen, jossa vedonvälittäjällä ei ole etumarginaalia, eli $\sum (1/o_i) = \sum r_i = 1$, ja jossa pelaaja sijoittaa koko varallisuutensa ko. kilpailuun. Koska $\sum r_i$ on yksi, ja koska pelaajan optimaalinen sijoitus on $\mathbf{b} = \mathbf{b}^* = \mathbf{p}$, voidaan r_i tulkita vedonvälittäjän ja b_i pelaajan arvioksi kilpailun todennäköisyysjakaumasta. Tuplausnopeuden voimme nyt kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned} W(\mathbf{b},\mathbf{p},\mathbf{o}) &= \sum p_i \log b_i o_i \\ &= \sum p_i \log\left(\frac{b_i}{p_i}\,\frac{p_i}{r_i}\right) \\ &= D(\mathbf{p} \,||\, \mathbf{r}) - D(\mathbf{p} \,||\, \mathbf{b}), \end{aligned}$$

josta näemme, että tuplausnopeus on vedonvälittäjän arvion tarkkuuden ja pelaajan arvion tarkkuuden erotus. Tarkkuudella tarkoitamme tässä arvion etäisyyttä todellisesta todennäköisyysjakaumasta suhteellisen entropian mielessä. Tästä seuraa, että pelaaminen on tuottavaa vain, jos pelaajan arvio on tarkempi kuin vedonvälittäjän arvio.

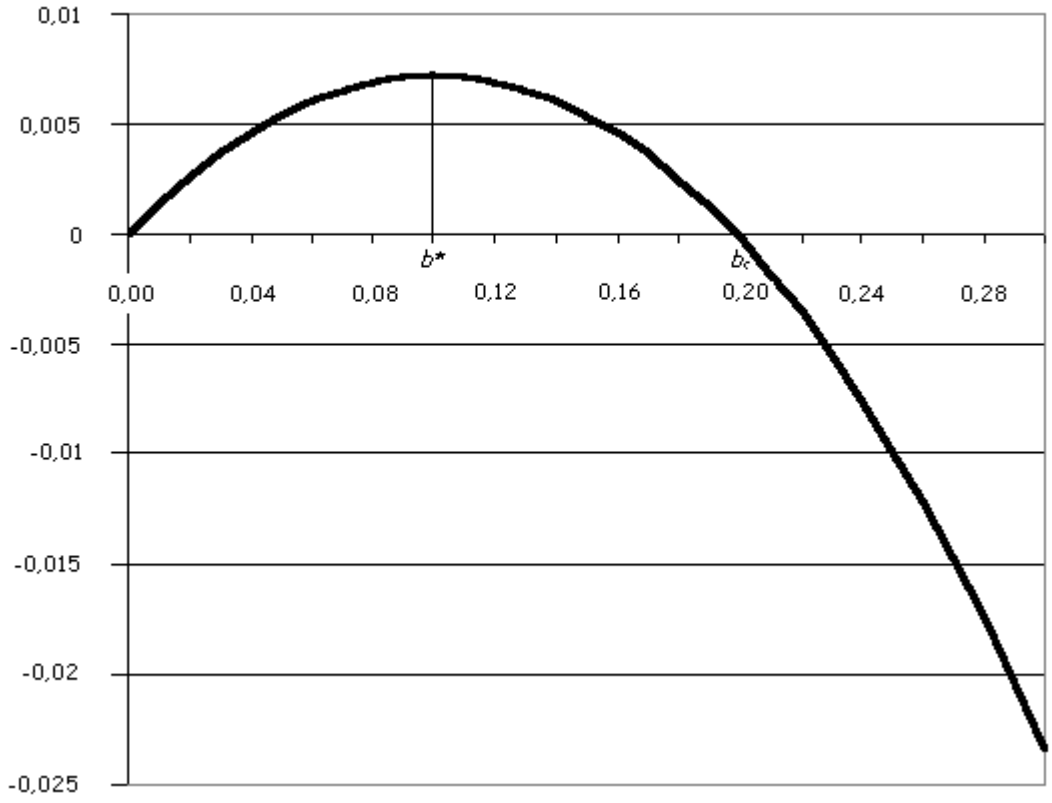
5.2 Väärän panoskoon käyttäminen

Tutkitaan millä välillä pelaajan käyttämä panoskoko b voi yksittäisen vedon tilanteessa vaihdella ilman, että pelikassan kasvu kääntyisi negatiiviseksi. Asettamalla tuplausnopeudelle edellisen luvun lopussa saatu approksimaatio nollaan, saadaan triviaalin ratkaisun $b_c = 0$ lisäksi ratkaisu

$$b_c \approx 2\frac{E(V)}{D^2(V)} = 2b^*,$$

josta ilmenee, että optimaaliseen sijoitukseen nähden yli kaksinkertaiset panokset johtavat negatiiviseen varallisuuden kasvunopeuteen, ja siten pelaaminen muuttuu tappiolliseksi odotusarvoltaan tuottavillakin pelikohteilla.

Kuvassa tilanteen $o = 2$, $p = 0{,}55$ tuplausnopeuden kuvaaja, jossa $b^* = 0{,}1$ ja $b_c \approx 0{,}19867 \approx 0{,}2 = 2b^*$.



5.3 Onnen vaikutus

Tämä luku pohjautuu julkaisun "The Kelly Criterion in Blackjack, Sports Betting, and the Stock Market" (Thorp) lukuun 3.

5.3.1 Todennäköisyys kiinteän summan saavuttamiselle *n*:n vedon aikana

Lasketaan Brownin liikkeen avulla approksimaatio todennäköisyydelle, että pelaaja saavuttaa tietyn ennalta annetun summan *n*:n vedon aikana. Approksimointia varten oletetaan jokaisen vedon kertoimeksi kaksi, $o = 2$, jolloin pelaajan varallisuus joko kasvaa tai vähenee sijoitetun panoksen verran. Oletetaan myös, että voiton todennäköisyys on välillä $1/2 < p < 1$, ja panos välillä $0 < b < 1$.

Saakoon riippumattomat ja samoin jakautuneet satunnaismuuttujat V_i, $i = 1,...,n$, arvon yksi pelaajan voittaessa vedon *i*, $P(V_i = 1) = p$, ja arvon miinus yksi pelaajan hävitessä, $P(V_i = 1) = 1 - p =: q$. Tällöin saadaan

$$
\begin{aligned}
S_k &= \prod_{i=1}^{k} (1 + bV_i), \\
\ln S_k &= \sum_{i=1}^{k} \ln(1 + bV_i), \\
E(\ln S_k) &= \sum_{i=1}^{k} E(\ln(1 + bV_i)), \\
D^2(\ln S_k) &= \sum_{i=1}^{k} D^2(\ln(1 + bV_i)), \\
E(\ln(1 + bV_i)) &= p\ln(1+b) + q\ln(1-b) = G(b) =: m, \\
D^2(\ln(1 + bV_i)) &= p(\ln(1+b))^2 + q(\ln(1-b))^2 - m^2 \\
&= (p - p^2)(\ln(1+b))^2 + (q - q^2)(\ln(1-b))^2 - 2pq\ln(1+b)\ln(1-b) \\
&= pq\left((\ln(1+b))^2 - 2\ln(1+b)\ln(1-b) + (\ln(1-b))^2\right) \\
&= pq(\ln((1+b)/(1-b)))^2 =: s^2
\end{aligned}
$$

Varallisuuden logaritmi $\ln S_k$ muodostaa satunnaiskulun, jonka siirtymä *k*:n vedon jälkeen on mk, ja varianssi s^2k.

Kun tutkitaan milloin *k*:n kilpailun jälkeinen varallisuus S_k on suurempi tai yhtäsuuri kuin vakio *C*, jollakin *k*, $1 \le k \le n$, ovat seuraavat epäyhtälöt edelleen yhtäpitäviä

$$S_k \geq C, \qquad 1 \leq k \leq n,$$

$$\ln S_k \geq \ln C, \qquad 1 \leq k \leq n,$$

$$\sum_{i=1}^{k} \ln(1 + bV_i) \geq \ln C, \qquad 1 \leq k \leq n,$$

$$Y_k := \sum_{i=1}^{k} (\ln(1 + bV_i) - m) \geq \ln C - mk, 1 \leq k \leq n.$$

Nyt $E(Y_k) = 0$ ja $D^2(Y_k) = s^2k$, ja kysytään todennäköisyyttä $P(Y_k \geq \ln C - mk,\ 1 \leq k \leq n)$. Satunnaismuuttujan *Yn* jokaista termiä approksimoi standardi Brownin liike $X(t)$, jonka varianssi on s^2 ($0 \leq t \leq s^2$, $s^2 \leq t \leq 2\ s^2$, ..., $(n\text{-}1)\ s^2 \leq t \leq n\ s^2$). Kun n on suuri, saadaan todennäköisyydelle $P(Y_k \geq \ln C - mk,\ 1 \leq k \leq n)$ Brownin liikkeen avulla arvio $P(X(t) \geq \ln C - mt/s^2,\ 1 \leq t \leq s^2n)$, joka voidaan laskea kaavalla

$$\text{(I)}\quad P(\sup(X(t) - (at + c)) \geq 0,\ 0 \leq t \leq T) = \Phi(-\alpha - \beta) + e^{-2ac}\Phi(\alpha - \beta),$$

missä $\alpha = a\sqrt{T}$, $\beta = c/\sqrt{T}$, ja $\Phi(x)$ on standardinormaalijakauman kertymäfunktio:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\, du.$$

Kaava (I) voidaan johtaa seuraavasti (Thorp, liite II). Jos $X(t)$ on standardi Brownin liike ja $a \neq 0$ sekä $c > 0$, on

$$P(X(t) \leq at + c,\ 0 \leq t \leq T \mid X(T) = s)$$
$$= \begin{cases} 1 - \exp\left\{-\frac{2b}{T}(aT + c - s)\right\}, & \text{jos } s \leq aT + c \\ 0, & \text{jos } s > aT + c, \end{cases}$$

joka voidaan kirjoittaa muotoon

$$P\big(X(t) \le at + c,\ 0 \le t \le T \mid X(T)\big)$$
$$\overset{m.v.}{=} 1 - \exp\left\{-2b\big(aT + c - X(t)\big)\frac{1}{T}\right\},\ \text{jos X(T)} \le aT + c.$$

Laskemalla odotusarvot molemmilta puolilta, saadaan

$$P\big(X(t) \le at + c,\ 0 \le t \le T\big)$$
$$= \int_{-\infty}^{aT+c} \left(1 - e^{-2c(aT+c-s)/T}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-s^2/2T}\, ds$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{aT+c} e^{-s^2/2T}\, ds - \frac{e^{-2ac}}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{aT+c} e^{-(s-2c)^2/2T}\, ds.$$

Ja tällöin

(II)

$$P(X \text{ ylittää suoran } at + c \text{ välillä } [0,T]) = 1 - P\big(X(t) \le at + c,\ 0 \le t \le T\big)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{aT+c}^{\infty} e^{-s^2/2T}\, ds + \frac{e^{-2ac}}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{aT-c} e^{-u^2/2T}\, du,$$

missä on tehty muuttujanvaihto $u = s - 2c$.

Nyt, kun $a = 0$ ja $c > 0$,

$$P\left(\sup_{0 \le t \le T} X(t) \ge c\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi T}} \int_{c}^{\infty} e^{-v^2/2T}\, dv.$$

Kun $T \to \infty$, pätee $\sqrt{T}\ /\ T \to 0$ ja $\sqrt{T}$ = $X(T)$:n keskihajonta, joten ensimmäinen integraali suppenee kohti nollaa, toinen integraali kohti ykköstä, ja $P(X$ ylittää joskus suoran $at + c) = e^{-2ac}$.

Asettamalla $\alpha = a\sqrt{T}$, ja $\beta = c/\sqrt{T}$, saadaan kaava (II) muotoon

$$P(\cdot) = \Phi(-\alpha - \beta) + e^{-2\alpha\beta}\Phi(\alpha - \beta), \text{ missä } \alpha, \beta > 0 \text{ tai}$$

$$P\big(X(t) \le at + c,\ 0 \le t \le T\big) = 1 - P(\cdot) = \Phi(\alpha + \beta) - e^{-2\alpha\beta}\Phi(\alpha - \beta)$$

todennäköisyydelle, että suoraa ei koskaan ylitetä. Tämä seuraa kaavoista

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{aT+c}^{\infty} e^{-s^2/2T}\, ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha+\beta}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx = \Phi\big(-\alpha - \beta\big)$$
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{aT-c} e^{-u^2/2T}\, du = \Phi\big(\alpha - \beta\big),$$

missä $s = aT + c$ ja $x = s/\sqrt{T} = a\sqrt{T} + c/\sqrt{T}$.

Kaava saadaan edelleen muotoon

$$\begin{aligned} &P\big(\sup\big(X(t) - (at + c)\big) \ge 0,\ 0 \le t \le T\big) \\ &= \Phi(-\alpha - \beta) + e^{-2ac}\Phi(\alpha - \beta) \\ &= \Phi(-\alpha - \beta) + e^{-2\alpha\beta}\Phi(\alpha - \beta),\ \alpha, \beta > 0. \end{aligned}$$

Tarkistetaan tulos vielä toteamalla, että

$$\begin{aligned} P(\cdot) &< \Phi(-\alpha - \beta) + \Phi(\alpha - \beta) \\ &= \big(1 - \Phi(\alpha + \beta)\big) + \Phi(\alpha - \beta) \\ &= \int_{-\infty}^{\alpha-\beta} \alpha(x)dx + \int_{\alpha+\beta}^{\infty} \alpha(x)dx < 1. \end{aligned}$$

Tarkastellaan numeerisena esimerkkinä miten pelaajan todennäköisyys kaksinkertaistaa ($C = 2$) varallisuutensa muuttuu vetojen lukumäärän ja edullisuuden mukaan.

Valitaan ensin vetojen määräksi $n = 1000$, kertoimeksi $o = 2$, voittotodennäköisyydeksi $p = 0{,}54$ ja panokseksi $b = b^* = 0{,}08$. Näiden avulla saadaan laskettua $a = -m/s^2 \approx -0{,}50161$, $c = \ln C \approx 0{,}69315$, $\alpha = -m\sqrt{n}/s \approx -1{,}26762$ ja $\beta = \ln C/(s\sqrt{n}) \approx 0{,}27428$, jotka kaavaan $P(\cdot) = \Phi(-\alpha - \beta) + e^{-2ac}\Phi(\alpha - \beta)$ sijoitettuna antavat todennäköisyydeksi $P(\cdot) \approx 0{,}9631$.

Vertailun vuoksi lasketaan mikä kysytty todennäköisyys on, kun parametrin ovat muuten samat, mutta a) $n = 2000$, b) $n = 2000$, $p = 0{,}52$ ja $b = b^* = 0{,}04$. Vastauksiksi saadaan kohdassa a) $P(\cdot) \approx 0{,}9921$, ja kohdassa b) $P(\cdot) \approx 0{,}8938$.

Jos tämän todennäköisyyden maksimointi (sopivasti valituilla parametreillä C ja n) otettaisiin kriteeriksi panoskokoon valintaan, ei aiempi kasvunopeuden maksimoiva panostus olisi enää optimaalinen.

5.3.2 Todennäköisyys hävitä osa alkupääomasta

Tarkastellaan nyt todennäköisyyttä, jolla pelaajan varallisuus putoaa joskus tiettyyn osaan alkuvarallisuudesta. Kysytään siis todennäköisyyttä $P(S_k \leq x$, jollakin k, $1 \leq k \leq \infty)$.

Edellisen kappaleen tapaan saadaan tällekin kysymykselle approksimaatio Brownin liikkeen avulla: $P(\cdot) = e^{2ac}$, missä $a = m/s^2$ ja $c = \ln x$. Tämä voidaan kirjoittaa vielä muotoon

$$P(\cdot) = x^{2m/s^2}.$$

Oletuksena on edelleen, että vedoilla on kertoimet $o = 2$.

Tarkastellaan esimerkkinä tilannetta $p = 0{,}55$ ja $b = b^* = 0{,}1$, josta saadaan $2m/s^2 \approx 1{,}005$ ja $P(\cdot) \approx x^{1{,}005} \approx x$. Panoksen ollessa $b = b^*$ ko. todennäköisyydellä onkin jatkuva-aikainen approksimaatio $P(\cdot) \approx x$.

5.3.3 Varallisuustilanteen todennäköisyys kiinteän kierrosmäärän jälkeen

Kysytään todennäköisyyttä, jolla ennalta määrätyn kierrosmäärän jälkeen pelaajan varallisuus on vähintään tietyssä tavoitesummassa. Brownin liikkeelle $X(T)$ pätee

$$\begin{aligned} P\big(X(T) \geq aT + c\big) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{aT+c}^{\infty} \exp\{-x^2/2T\}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{aT^{1/2}+cT^{1/2}}^{\infty} \exp\{-u^2/2\}du, \end{aligned}$$

missä on sijoitettu $u = x/\sqrt{T}$, jolloin lause $x = aT + c$ antaa $u\sqrt{T} = aT + c$ ja $u = a\sqrt{T} + c/\sqrt{T}$. Saatu integraali on yhtä kuin

$$\begin{aligned} 1 - \Phi(a\sqrt{T} + c/\sqrt{T}) &= \Phi\big(-(a\sqrt{T} + c/\sqrt{T})\big) \\ &= 1 - \Phi(\alpha + \beta) \\ &= \Phi(-\alpha - \beta), \end{aligned}$$

josta saadaan myös vastaus esitettyyn kysymykseen.

Esimerkkinä tilanne $C = 2$, $n = 1000$, $p = 0{,}54$ ($o = 2$) ja $b = b^* = 0{,}08$. Nyt $\alpha = -m\sqrt{n}/s \approx -1{,}26762$, $\beta = \ln C/(s\sqrt{n}) \approx 0{,}27428$, ja $P(\cdot) \approx 0{,}8397$.

5.3.4 Odotettavissa oleva aika kiinteän tavoitteen saavuttamiselle

Johdetaan kiinteän tavoitesumman saavuttamiseen tarvittavien vetojen lukumäärän odotusarvolle approksimaatio (Thorp, luku 3 ja liite III)

$$n(C,b) = (\log C)/W(b),$$

missä C ($> S_0 = 1$) on tavoite ja $W(b)$ tuplausnopeus panoskoolla b.

Koska tuplausnopeudella $W(b)$ on maksimikohta $W(b^*)$ pisteessä, saa odotusarvo $n(C,b)$ pienimmän arvonsa kun $b = b^*$. Jatkuvassa tapauksessa optimaalisen kasvunopeuden sijoitusstrategia b^* siis minimoi kiinteän tavoitteen saavuttamiseen tarvittavan ajan odotusarvon.

Approksimaation johtamiseksi oletetaan, että $o = 2$ joka vedolla. Sekä pidetään tunnettuna kaavaa

$$(1)\ \int \exp\left\{-\left(a^2x^2 + c^2/x^2\right)\right\}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a}\left[e^{2ac}\,erf\left(ax + c/x\right) + e^{-2ac}\,erf\left(ax - c/x\right)\right] + C,$$

missä $erf(z) := \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-t^2}dt$, ja a $\neq$ 0. Koska yhtälön vasen puoli on positiivinen, vaaditaan reaalisen a:n tapauksessa $a > 0$, muutoin yhtälön oikea puoli saisi negatiivisen arvon.

Pidetään myös tunnettuna yhtälöä

$$(2)\ \int_0^\infty \exp\left\{-\left(at^2 + c/t^2\right)\right\}dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-2\sqrt{ac}}$$

reaalisilla luvuilla $a > 0$ ja $c > 0$.

Oletetaan, että kaavassa (1) $a > 0$ ja $c > 0$, ja etsitään raja-arvot $\lim_{x\to 0}$ ja $\lim_{x\to\infty}$ funktioille $erf\,(ax + c/x)$ ja $erf\,(ax - c/x)$. Saadaan

$$\lim_{x\downarrow 0+}(ax+c/x)=+\infty, \quad \lim_{x\downarrow 0+}(ax-c/x)=-\infty,$$
$$\lim_{x\to\infty}(ax+c/x)=+\infty, \quad \lim_{x\to\infty}(ax-c/x)=+\infty,$$

jolloin yhtälöstä (1) tulee

$$\frac{\sqrt{\pi}}{4a}e^{-2ac}\left[erf(\infty)-erf(-\infty)\right]=\frac{\sqrt{\pi}}{4a}e^{-2ac}\,2erf(\infty)$$
$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-2ac},$$

koska tiedetään, että *erf* (∞) = 1.

Korvaamalla kaavassa (2) a a^2:lla ja c c^2:lla, saadaan

$$I_0\left(a^2,c^2\right)=\int_0^\infty \exp\left\{-\left(a^2t^2+c^2/t^2\right)\right\}dt=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{|a|}e^{-2|ac|},$$

eli sama kuin aiemminkin.

Valitsemalla kaavassa (1) alemmaksi integrointirajaksi 0, saadaan integrointivakiolle C arvo seuraavasti:

$$0=\int_0^0 \exp\left\{-\left(a^2x^2+c^2/x^2\right)\right\}dx$$
$$=\frac{\sqrt{\pi}}{4a}\left[e^{2ac}erf(\infty)+e^{-2ac}erf(-\infty)\right]+C$$
$$=\frac{\sqrt{\pi}}{4a}\left[e^{2ac}-e^{-2ac}\right]+C,$$

sillä

(3)

$$F(x) := \int_0^x \exp\left\{-\left(a^2x^2 + c^2/x^2\right)\right\}dx$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{4a}\left[e^{2ac}\left(erf\left(ax + c/x\right) - 1\right) + e^{-2ac}\left(erf\left(ax - c/x\right) + 1\right)\right].$$

Derivoimalla $F(x)$ nähdään kuinka kaava (3) on mahdollisesti löydetty:

$$F'(x) \equiv \exp\left\{-\left(a^2x^2 + c^2/x^2\right)\right\}$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{4a}\left[e^{2ac}\left(a - c/x^2\right)erf'\left(ax + c/x\right) + e^{-2ac}\left(a + c/x^2\right)erf'\left(ax - c/x\right)\right].$$

Nyt kun $erf'(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-z^2\right)$, on

$$erf'\left(ax + c/x\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\exp\left\{-\left(ax + c/x\right)^2\right\}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\exp\left\{-\left(a^2x^2 + c^2/x^2 + 2ac\right)\right\}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-2ac}\exp\left\{-\left(a^2x^2 + c^2/x^2\right)\right\},$$

ja asettamalla $c \leftarrow -c$,

$$erf'\left(ax - c/x\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{2ac}\exp\left\{-\left(a^2x^2 + c^2/x^2\right)\right\},$$

jolloin

$$F(x)' = \frac{\sqrt{\pi}}{4a}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(a - c/x^2\right) + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(a + c/x^2\right)\right]\exp\left\{-\left(a^2x^2 + c^2/x^2\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{2a}[2a]\exp\left\{-\left(a^2x^2 + c^2/x^2\right)\right\}$$
$$= \exp\left\{-\left(a^2x^2 + c^2/x^2\right)\right\}.$$

Kiinnostava tapaus on kun $a < 0$ ja $c > 0$. Odotetaan, että

$$c > 0, a \le 0 \Rightarrow F(T) \uparrow 1, \text{ kun } T \to \infty, \text{ ja}$$
$$c > 0, a > 0 \Rightarrow F(T) \uparrow d < 1, \text{kun } T \to \infty.$$

Jos $c > 0$ ja $a = 0$,

$$F(T) = \Phi(-\beta) + \Phi(-\beta) = 2\Phi\left(-c/\sqrt{T}\right) \uparrow 2\Phi(0) = 1, \text{kun } T \uparrow \infty.$$

Ja kuten odotettiin, myös F(T) $\uparrow$ 1, kun c $\downarrow$ 0.

Jos c > 0 ja a > 0,

$$F(T) = \Phi\left(-a\sqrt{T} - c/\sqrt{T}\right) + e^{-2ac}\Phi\left(a\sqrt{T} - b/\sqrt{T}\right) \to \Phi(-\infty) + e^{-ac}\Phi(\infty)$$
$$= e^{-2ac} < 1 \text{kun } T \uparrow \infty.$$

Jos $c = 0$, $F(T) = \Phi(-a\sqrt{T}) + \Phi(a\sqrt{T}) = 1$.

Asetetaan $F(T) = P(X(t) \ge at + c$ jollakin t, $0 \le t \le T)$, joka on yhtä kuin $\Phi(-\alpha - \beta) + e^{-2ac}\Phi(\alpha - \beta)$, missä $\alpha = a\sqrt{T}$ ja $\beta = c/\sqrt{T}$, eli $ac = \alpha\beta$. Oletetaan, että $c > 0$ ja $a < 0$, jolloin $0 \le F(T) \le 1$, sekä $\lim_{T\to\infty} F(T) = 1$ ja $\lim_{T\to 0} F(T) = 0$. F on kertymäfunktio, sillä

$$\lim_{T\to 0} F(T) = \Phi(-\infty) + e^{-2ac}\Phi(-\infty) = 0,$$
$$\lim_{T\to\infty} F(T) = \Phi(+\infty) + e^{-2ac}\Phi(-\infty) = 1.$$

Ja vastaava tiheysfunktio on

$$f(T) = F'(T)$$
$$= \frac{\partial}{\partial T}(-\alpha-\beta)\varphi(-\alpha-\beta) + e^{-2ac}\frac{\partial}{\partial T}(\alpha-\beta)\varphi(\alpha-\beta),$$

missä

$$\frac{\partial\alpha}{\partial T} = \frac{1}{2}aT^{-1/2}, \qquad \frac{\partial\beta}{\partial T} = -\frac{1}{2}cT^{-3/2},$$

ja φ standardinormaalijakauman tiheysfunktio,

$$\varphi(-\alpha-\beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(\alpha+\beta)^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(a^2T + c^2/T + 2ac)}{2}\right\},$$
$$\varphi(\alpha-\beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(\alpha-\beta)^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(a^2T + c^2/T - 2ac)}{2}\right\},$$

$$Tf(T) = T\left(-\frac{1}{2}aT^{-1/2} + \frac{1}{2}cT^{-3/2}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ac}\exp\left\{-\frac{\left(a^2T + c^2/T\right)}{2}\right\}$$
$$+ Te^{-2ac}\left(\frac{1}{2}aT^{-1/2} + \frac{1}{2}cT^{-3/2}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ac}\exp\left\{-\frac{\left(a^2T + c^2/T\right)}{2}\right\}$$
$$= \frac{e^{-ac}}{\sqrt{2\pi}}\left[\left(-a\sqrt{T} + c/\sqrt{T}\right)\exp\left\{-\frac{\left(a^2T + c^2/T\right)}{2}\right\} + \left(a\sqrt{T} + c/\sqrt{T}\right)\exp\left\{-\frac{\left(a^2T + c^2/T\right)}{2}\right\}\right].$$

Odotettava aika tavoitteen saavuttamiseksi on

$$E_\infty = \int_0^\infty Tf(T)dT = \frac{ce^{-ac}}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{T}}\exp\left\{-\frac{\left(a^2T + c^2/T\right)}{2}\right\}dT,$$

josta saadaan muuttujanvaihdolla $T = x^2$, $dT = 2xdx$,

$$E_\infty = \frac{2ce^{-ac}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \exp\left\{ -\left[\left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 x^2 + \left(\frac{c}{2\pi}\right)^2 / x^2 \right] \right\} dx$$
$$= \frac{2ce^{-ac}}{\sqrt{2\pi}} I_0\left(\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2, \left(\frac{c}{\sqrt{2}}\right)^2 \right).$$

Nyt

$$I_0\left(a^2, c^2\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2|a|} e^{-2|ac|},$$
$$I_0\left(\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2, \left(\frac{c}{\sqrt{2}}\right)^2 \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}|a|} e^{-|ac|}, \text{ joten}$$
$$E_\infty = \frac{2ce^{-ac}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}|a|} e^{-|ac|} = \frac{c}{|a|}, \quad a < 0, b > 0.$$

Huomataan, että

$$F'(T) = \frac{ce^{-ac}}{\sqrt{2\pi}} T^{-3/2} \exp\left\{ -\frac{\left(a^2 T + c^2 / T\right)}{2} \right\} > 0$$

kaikilla a, joten $F(T)$ on aidosti kasvava. Koska $\lim_{T\to\infty} F(T) = 1$, on $0 \le F(T) \le 1$ kaikilla T, ja näin kaavan käyttäminen myös arvoilla $a < 0$ tuntuu järkevältä. Varmistetaan tämä toteamalla, että $E_\infty(a,c) \downarrow 0$ kun $a \downarrow -\infty$, $E_\infty(a,c) \uparrow$ kun $c \uparrow$ ja $E_\infty(a,c) \uparrow$ kun $|a| \downarrow$. Huomataan myös. että $\lim_{a\downarrow 0+} E_\infty(a,c) = +\infty$, mikä kertoo, että "reilussa" kolikon heitossa äärellisellä pääomalla pelaavan pelaajan vararikkoon joutumisen ajankohdan odotusarvo on ääretön.

Kaava $E_\infty = c / |a|$ tarkoittaa, että ajan odotusarvo on sama kuin piste, jossa $aT + c$ ja $X(t) = 0$ leikkaavat:

$$E_\infty = c/|a|, \quad a = -m/s^2, \quad c = \ln C$$
$$m = p\ln(1+b) + q\ln(1-b) \equiv G(b)$$
$$s^2 = pq[\ln((1+b)/(1-b))]^2$$
$$b^* = 2p - 1, \quad \mathrm{G}\left(b^*\right) = p\ln 2p + q\ln 2q$$
$$E_\infty = (\ln C)s^2 / G(b), \quad \text{kun } m > 0.$$

Näin on saatu ajan odotusarvo varianssiyksiköissä. Ja koska s^2 varianssiyksikköä on yksi veto, saadaan vetojen lukumäärän odotusarvoksi

$$n(C,b) := \frac{E_\infty}{s^2} = \frac{\ln C}{m} = \frac{\ln C}{G(b)} = \frac{\log C}{W(b)}.$$

Tarkistetaan kaava toteamalla, että se toteuttaa seuraavat ehdot:

$$n(C,b) \uparrow \text{kun } C \uparrow,$$
$$n(C,b) \to \infty \text{ kun } C \to \infty,$$
$$n(C,b) \uparrow \text{kun } m \downarrow 0,$$
$$n(C,b) \to \infty \text{ kun } m \to 0.$$

6 Lisäinformaation vaikutus tuottoon

Luku pohjautuu teoksen "Elements of Information Theory" (Cover&Thomas) lukuihin 6.2 ja 6.3.

Oletetaan, että pelaaja saa käyttöönsä jotakin tulevien kilpailujen lopputuloksiin vaikuttavaa lisäinformaatiota, joka näin ollen myös vaikuttaa hänen omiin pelivalintoihinsa. Tarkastellaan nyt miten tämä informaatio vaikuttaa varallisuuden kasvunopeuteen.

Otetaan lisäinformaatiolle käyttöön merkintä Y. Ja kuten aiemminkin, käytetään merkintöjä $p(x)$ ja $o(x)$ hevosen $X \in \{1,2,...,m\}$ voittotodennäköisyydelle ja kertoimelle, sekä merkintää $b(x)$ hevoselle x tehtävästä sijoituksesta silloin, kun lisäinformaatiota ei ole käytettävissä. Olkoon satunnaismuuttujaparin (X,Y) yhteispistetodennäköisyys $p(x,y)$, ja olkoon $b(x|y)$ hevoselle x sijoitettava osuus varallisuudesta silloin, kun y on havaittu. Kun $b(x) \geq 0$ ja $b(x|y) \geq 0$, sekä $\Sigma_x\ b(x) = 1$ ja $\Sigma_x\ b(x|y) = 1$, merkitään tuplausnopeudet seuraavasti

$$W^*(X) = \max_{\mathbf{b}(x)} \sum_x p(x) \log b(x) o(x),$$

$$W^*(X \mid Y) = \max_{\mathbf{b}(x|y)} \sum_{x,y} p(x,y) \log b(x \mid y) o(x),$$

ja määritellään lisäksi tuplausnopeuden muutos $\Delta W = W^*(X|Y) - W^*(X)$, joka mittaa lisäinformaation antamaa rahallista hyötyä.

Optimaalinen ehdollinen kasvunopeus $W^*(X|Y)$ saavutetaan, kun $\mathbf{b}^*(x|y) = p(x|y)$, joten

$$\begin{aligned} W^*(X \mid Y) &= \max_{\mathbf{b}(x|y)} E[\log S] = \max_{\mathbf{b}(x|y)} \sum p(x,y) \log o(x) b(x \mid y) \\ &= \sum p(x,y) \log o(x) p(x \mid y) \\ &= \sum p(x) \log o(x) - H(X \mid Y). \end{aligned}$$

Tuplausnopeus ilman lisäinformaatiota on

$$W^*(X) = \sum p(x) \log o(x) - H(X).$$

Ja tuplausnopeuden muutos voidaan nyt kirjoittaa

$$\begin{aligned} \Delta W &= W^*(X \mid Y) - W^*(X) \\ &= H(X) - H(X \mid Y) \\ &= I(X;Y). \end{aligned}$$

Tuplausnopeuden kasvu on siis yhtä suuri kuin hevoskilpailun ja lisäinformaation yhteisinformaation.

Käytännössä tärkein lisäinformaation lähde on hevosten suoritukset aiemmissa kilpailuissa. Mikäli kilpailut ovat riippumattomia, ei tällä informaatiolla ole pelaajalle mitään arvoa. Mutta tilanteessa, jossa kilpailut eivät ole toisistaan riippumattomia, voimme laskea ehdollisen tuplausnopeuden, kun aiempien kilpailujen tulokset ovat pelaajan tiedossa.

Oletetaan, että hevoskilpailujen lopputulosten sarja $\{X_k\}$ muodostaa stokastisen prosessin, ja että aiempien kilpailujen tulokset vaikuttavat myös pelaajan sijoitusstrategiaan. Tällöin tilanteessa, jossa jokaisen hevosen voittokerroin on yhtä suuri kuin hevosten lukumäärä ($o_i = m$), on optimaalinen tuplausnopeus

$$\begin{aligned} & W^*(X_k \mid X_{k-1}, X_{k-2}, \ldots, X_1) \\ &\quad = E\left[\max_{\mathbf{b}(\cdot \mid X_{k-1}, X_{k-2}, \ldots, X_1)} E[\log S(X_k) \mid X_{k-1}, X_{k-2}, \ldots, X_1] \right] \\ &\quad = \log m - H(X_k \mid X_{k-1}, X_{k-2}, \ldots, X_1), \end{aligned}$$

joka saavutetaan kun $b^*(x_k|x_{k-1},\ldots,x_1) = p(x_k|x_{k-1},\ldots,x_1)$.

Pelaajan varallisuus n:n kilpailun jälkeen on

$$S_n = \prod_{k=1}^{n} S(X_k),$$

ja kasvunopeuden eksponentti (olettaen $o_i = m$)

$$\begin{aligned}\frac{1}{n} E \log S_n &= \frac{1}{n} \sum E \log S(X_i) \\ &= \frac{1}{n} \sum (\log m - H(X_i \mid X_{i-1}, X_{i-2}, ..., X_1)) \\ &= \log m - \frac{H(X_1, X_2, ..., X_n)}{n}.\end{aligned}$$

Suure $(1/n)H(X_1,X_2,...,X_n)$ kuvaa yhden kilpailun keskimääräistä entropiaa. Stationaariselle prosessille, jonka entropia on $H(\aleph)$, saadaan edellisen kaavan raja-arvona

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} E \log S_n + H(\aleph) = \log m.$$

Havaitsimme näin, että tuplausnopeuden ja entropian summa on vakio.

6.1 Esimerkki lisäinformaatiosta

Esimerkki perustuu teoksen "Elements of Information Theory" (Cover&Thomas) esimerkkiin 6.3.1.

Lisäinformaation vaikutuksen havainnollistamiseksi tarkastelemme korttipeliä, jossa käydään läpi 52 kortin pakka (26 mustaa ja 26 punaista korttia), ja pelaaja lyö vetoa siitä, onko seuraava kortti musta vai punainen. Pelaaja saa aina kaksinkertaisena

takaisin oikeaan väriin sijoittamansa rahat, ja menettää väärälle värille tehdyt sijoitukset.

Aiempien tulostemme mukaan pelaajan kannattaa tällaisessa pelissä sijoittaa jokaisen kortin kohdalla koko varallisuutensa strategialla **b** = **b*** = **p**. Ensimmäisellä kortilla kannattaa siis sijoittaa mustalle ja punaiselle osuudet $\frac{1}{2}$ ja $\frac{1}{2}$. Ja mikäli ensimmäinen kortti oli punainen, ovat sijoitukset seuraavalle kortille ehdollisten todennäköisyyksien mukaisesti $\frac{26}{51}$ mustalle ja $\frac{25}{51}$ punaiselle. Näin jatketaan kunnes koko pakka on käyty läpi.

Ajatellaan vaihtoehtoisesti, että voisimme lyödä vetoa koko 52:n kortin sarjasta yhdellä kertaa. Mahdollisia sarjoja on tällöin $\binom{52}{26}$ kappaletta, ja jokainen niistä on yhtä todennäköinen. Kun äsken jokainen oikein veikattu kortti palautti sijoituksen takaisin kaksinkertaisena, antaa vastaavasti nyt koko sarjan oikein veikkaaminen sijoitetun summan takaisin 2^{52}-kertaisena. Koska $\Sigma\ r_i = \binom{52}{26} / 2^{52} < 1$, on optimaalinen sijoitusstrategia taas **b*** = **p**. Sijoitus kullekin sarjalle on siis $1 / \binom{52}{26}$ pelaajan varallisuudesta.

Havaitsemme, että mainitut kaksi peliä ovat keskenään ekvivalentit. Ensimmäisen kortin kohdalla on molemmissa vaihtoehdoissa puolet varallisuudesta sijoitettuna mustalle kortille ja puolet punaiselle. Ja vastaavasti kummassakin pelissä on jokaisessa vaiheessa molemmille väreille sijoitettuna niiden todennäköisyyksiä vastaavat osuudet jäljellä olevasta varallisuudesta. Erona on vain, että ensimmäisessä pelivaihtoehdossa voittoja maksetaan jokaisen kortin jälkeen, ja toisessa taas vasta kun viimeinenkin kortti on katsottu.

Kun jokaiselle 52:n kortin sarjalle sijoitettaan osuus $1 / \binom{52}{26}$, ja yksi näistä sijoituksista voitetaan takaisin 2^{52}-kertaisena, saadaan pelin jälkeiseksi varallisuudeksi

$$S_{52}^{*} = \frac{2^{52}}{\binom{52}{26}} \approx 9{,}08.$$

Lopullinen voittosumma on siis vakio molemmissa pelivaihtoehdoissa, eikä itse pelissä sattuvalla korttien järjestyksellä ole merkitystä lopputuloksen kannalta.

7 Utiliteettiteoria

Kuten jo aiemmin todettiin, on kysymys "oikean" panoskoon määrittämisestä subjektiivinen, riippuen pelaajan henkilökohtaisesta riskinottohalukkuudesta ja tuottotavoitteista. Utiliteettiteoria tarjoaakin keinon henkilökohtaisten preferenssien esittämiseen numeerisessa muodossa, ja siten myös pelipanosten valintaan ilman muunlaisia, mahdollisesti keinotekoiselta tuntuvia, tavoitteen asetteluja. Sivuutetaan kuitenkin kysymys omien preferenssien selvittämisestä, joka ei ole aivan yksinkertaista.

7.1 Preferenssi ja utiliteettifunktio

Seuraavat määritelmät pohjautuvat kurssin "Bayesläiset tilastolliset menetelmät" (Mäkeläinen) luentomonisteen lukuun III.

Vaikka teoria sallii mielivaltaisten seurausten käsittelemisen, keskitytään tässä riskeihin (eli arpoihin), joiden seuraukset ovat rahallisia. Seuraukset ovat päätöksentekijälle jonkin arvon omaavia asioita (tässä siis varallisuustilanteita tai sen muutoksia).

Olkoon seurausten joukko $\zeta = (\alpha,\beta) \subset \mathbf{R}$, $-\infty \le \alpha \le \beta \le \infty$, avoin, puoliavoin tai suljettu väli. Joukossa ζ määritellään äärellisten jakaumien (=arpojen) V joukko ζ_0^* seuraavasti: $V \in \zeta_0^*$ jos ja vain jos $P(A) = 1$ jollakin äärellisellä joukolla $A \subset \zeta$. Seuraus a ja arpa, jolla $P(a) = 1$ samaistetaan: $\zeta \subset \zeta_0^*$.

Preferenssirelaatio $\succeq$ joukossa ζ_0^* määritellään relaationa, joka toteuttaa ehdot

$$(i)\ \forall V_1, V_2 \in \zeta_0^*, V_1 \succeq V_2 \text{ tai } V_2 \succeq V_1 \text{ (vertailtavuus)},$$
$$(ii)\ V_1 \succeq V_2 \ \&\ V_2 \succeq V_3 \Rightarrow V_1 \succeq V_3 \text{ (transitiivisuus)}.$$

Preferenssirelaatiolla ilmaistaan arpojen välistä paremmuusjärjestystä: $V_1 \succeq V_2$ tarkoittaa, että V_1 on parempi tai yhtä hyvä kuin V_2.

Funktio u: $\zeta_0^* \to \mathbf{R}$ on utiliteettifunktio, jos se on lineaarinen, eli jos

$$u(\lambda V_1 + (1-\lambda)V_2) = \lambda u(V_1) + (1-\lambda)u(V_2), \text{ kun } 0 \le \lambda \le 1 \text{ ja } V_1, V_2 \in \zeta_0^*.$$

Utiliteettifunktio u vastaa preferenssirelaatiota $\succeq$, jos $V_1 \succeq V_2 \Leftrightarrow u(V_1) \ge u(V_2)$. Utiliteettifunktiolla on myös esitys $u(V) = E_V u$, josta saadaan utiliteettien odotusarvohypoteesi: $V_1 \succeq V_2 \Leftrightarrow E_{V_1} u \ge E_{V_2} u$.

Päätöksentekijän preferenssejä voidaan siis kuvata utiliteettifunktiolla, joka päätöksentekotilanteessa asettaa eri päätösvaihtoehdot paremmuusjärjestykseen, jolloin valinnan suorittaminen on helppoa.

7.2 Logaritminen utiliteettifunktio

Valitsemalla kokonaisvarallisuudelle utiliteettifunktio $u(x) = \ln(x)$, havaitaan, että tämän utiliteetin maksimointi ja aiemmin käsitelty kasvunopeuden maksimointi ovat keskenään ekvivalentteja. Kyseinen utiliteettifunktio on määritelty vain positiivisilla x:n arvoilla ja $\lim_{x \to 0+} \ln(x) = -\infty$ sekä $\lim_{x \to \infty} \ln(x) = \infty$. On kuitenkin epärealistista pitää äärettömän suurta varallisuutta äärettömän hyvänä tilana ja nollatilannetta äärettömän huonona.

Tarkastellaan esimerkiksi peliä, jossa kolikkoa heitetään, kunnes tulee ensimmäinen klaava. Jos klaava tulee n:nnellä heitolla, voittaa pelaaja $2^{(2^{n-1})}$ markkaa. Voittosumma on siis jokin seuraavista (2,4,16,256,...) todennäköisyyksin ($\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, ...$). Suuren summan voittaminen on siis kovin epätodennäköistä. Voiton odotusarvoksi on helppo todeta ääretön, joten odotusarvon maksimoiva pelaaja olisi valmis luopumaan kaikesta

omaisuudestaan saadakseen osallistua peliin. Mutta myöskin ln(x)-utiliteettifunktion mukaan toimiva pelaaja olisi valmis maksamaan mielivaltaisen paljon osallistumisoikeudesta, sillä utiliteetin odotusarvo kyseisessä pelissä on tällöin

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \ln\left(2^{(2^{n-1})}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{2^{n-1}}{\log_2(e)} = \infty.$$

Tällainen paradoksi voidaan muotoilla kaikille ylhäältä rajoittamattomille utiliteettifunktioille. Siksi rajoittamattomat utiliteettifunktiot ovat vain approksimaatioita todellisesta tilanteesta, eikä esimerkiksi kasvunopeuden maksimointi tarkkaan ottaen vastaa kenenkään rationaalisesti toimivan pelaajan preferenssejä.

7.3 Ehdokas rajoitetuksi utiliteettifunktioksi

Oma ehdokkaani kokonaisvarallisuuden utiliteettifunktioksi on

$$v(x) := -\ln\left(\frac{1-\alpha^2}{x/\beta + \alpha} + \alpha\right),$$

missä $\alpha \in]0,1[$, ja $\beta > 0$.

Funktion tavoitteena on muistuttaa ominaisuuksiltaan mahdollisimman paljon kasvunopeuden maksimoivaa logaritmista utiliteettifunktiota, mutta joka on kuitenkin parametrin muunnoksella rajoitettu sekä alhaalta että ylhäältä. Kahta lisäparametriä voidaan käyttää henkilökohtaisten riskinhallintapreferenssien säätämiseen.

Funktio on kuvaus v: [0, ∞[→ [ln(α), ln(1/α)[. Arvolla α = 0 olisi $v(x)$ = ln(x/β) ekvivalentti ln(x)-utiliteettifunktion kanssa, joten α määrää siten poikkeavuuden yksinkertaisesta logaritmifunktiosta.

Parametri β määrää sen varallisuustilanteen, jonka ympäristössä funktio vastaa ln(x)-utiliteettifunktiota (kaikilla arvoilla α). Tämä voidaan osoittaa tarkastelemalla funktioiden riskinkaihdantafunktioita, jotka määritellään kaavalla

$$r(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)},$$

missä $r(x)$ on utiliteettifunktiota $u(x)$ vastaava riskinkaihdantafunktio. Funktioita $\ln(x)$ ja $v(x)$ vastaavat riskinkaihdantafunktiot ovat

$$r(x) = -\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}, \qquad \text{kun } u(x) = \ln(x)$$

$$r(x) = -\frac{\dfrac{\left(1-\alpha^2\right)^2}{\beta^2(\alpha + x/\beta)^4\left(\alpha + \dfrac{1-\alpha^2}{\alpha + x/\beta}\right)^2} - \dfrac{2\left(1-\alpha^2\right)}{\beta^2(\alpha + x/\beta)^3\left(\alpha + \dfrac{1-\alpha^2}{\alpha + x/\beta}\right)}}{\dfrac{1-\alpha^2}{\beta(\alpha + x/\beta)^2\left(\alpha + \dfrac{1-\alpha^2}{\alpha + x/\beta}\right)}}$$

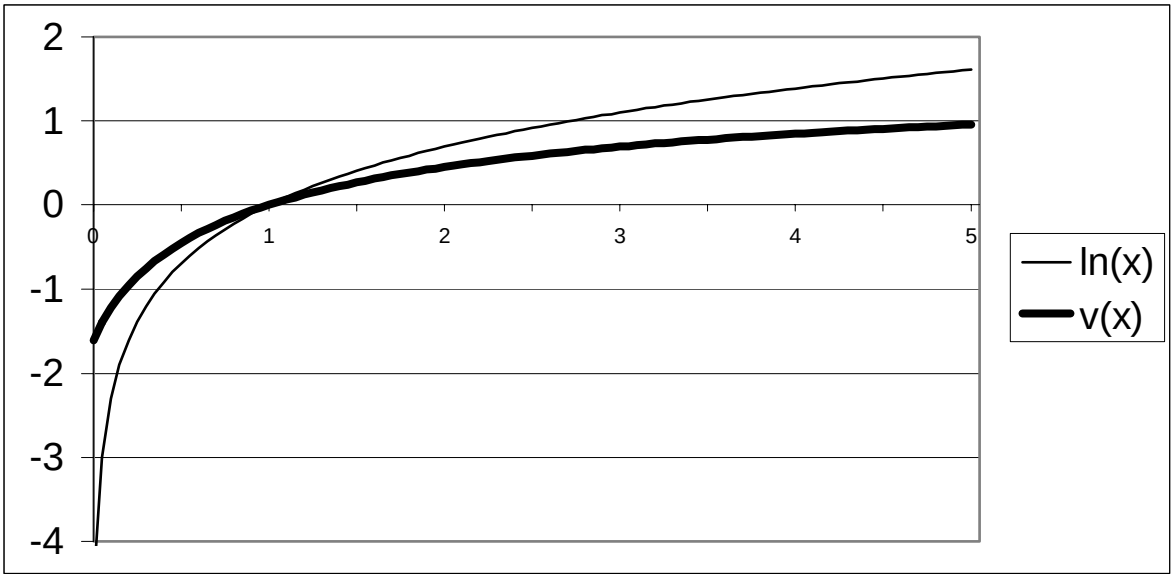
$$= \frac{2x + \dfrac{\beta}{\alpha}\left(1+\alpha^2\right)}{x^2 + \beta^2 + \dfrac{\beta x}{\alpha}\left(1+\alpha^2\right)}, \qquad \text{kun } u(x) = v(x).$$

Pisteessä β saavat molemmat riskinkaihdantafunktiot saman arvon, sillä jälkimmäinen on silloin

$$r(x) = \frac{2\beta + \dfrac{\beta}{\alpha}\left(1+\alpha^2\right)}{2\beta^2 + \dfrac{\beta^2}{\alpha}\left(1+\alpha^2\right)} = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{x}.$$

Näin on todettu utiliteettifunktioiden $\ln(x)$ ja $v(x)$ vastaavan toisiaan pisteessä β.

Kuvassa funktio $v(x)$ parametrein $\alpha = 0{,}2$ ja $\beta = 1$, sekä funktio $\ln(x)$:



Yksittäisen vedon tapauksessa

$$\begin{cases} P\{V = S(1+b(o-1))\} = p \\ P\{V = S(1-b)\} = 1-p, \end{cases}$$

missä S on pelaajan varallisuus, on utiliteetti

$$v(V) = -p\ln\left(\frac{\beta(1-\alpha^2)}{\alpha\beta + S(1+b(o-1))} + \alpha\right) - (1-p)\ln\left(\frac{\beta(1-\alpha^2)}{\alpha\beta + S(1-b)} + \alpha\right).$$

Derivoimalla saadaan

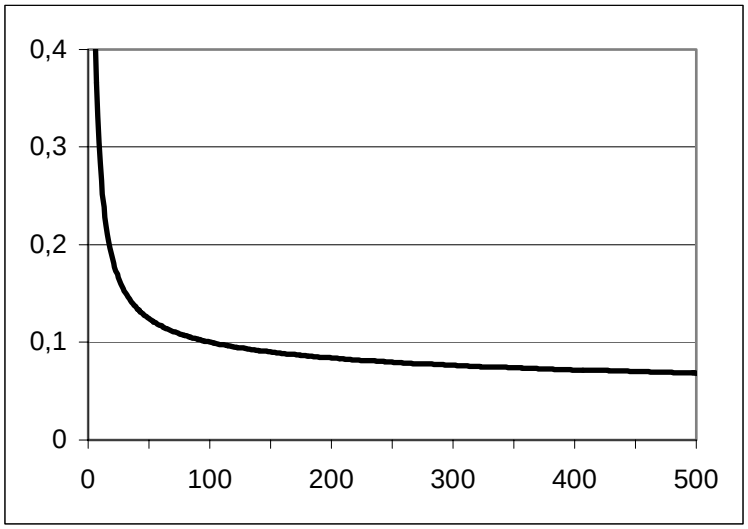
$$v'(V) = \frac{p(o-1)S\beta(1-\alpha^2)}{(\alpha\beta + S(1+b(o-1)))^2\left(\frac{\beta(1-\alpha^2)}{\alpha\beta + S(1+b(o-1))} + \alpha\right)} - \frac{(1-p)x\beta(1-\alpha^2)}{(\alpha\beta + S(1-b))^2\left(\frac{\beta(1-\alpha^2)}{\alpha\beta + S(1-b)} + \alpha\right)}.$$

Ja derivaatan nollakohdasta saadaan panoskoolle kaava

$$b = \frac{\sqrt{\left(\frac{\beta(1-\alpha^2)}{2\alpha S}\right)^2 + \frac{p(1-p)o^2}{o-1}\left(\left(\frac{\beta}{S}\right)^2 + \frac{\beta(1+\alpha^2)}{\alpha S} + 1\right)} - \frac{\beta(1+\alpha^2)}{2\alpha S} - 1}{(1-p)o - 1}.$$

Jos kaava antaa arvon $b>1$, sijoitettavaksi tulee koko varallisuus.

Seuraavassa b:n kuvaaja (varallisuuden S funktiona), kun $\alpha = 0{,}2$, $\beta = 100$, $o = 2$ ja $p = 0{,}55$ (jolloin $b^* = 0{,}1$):



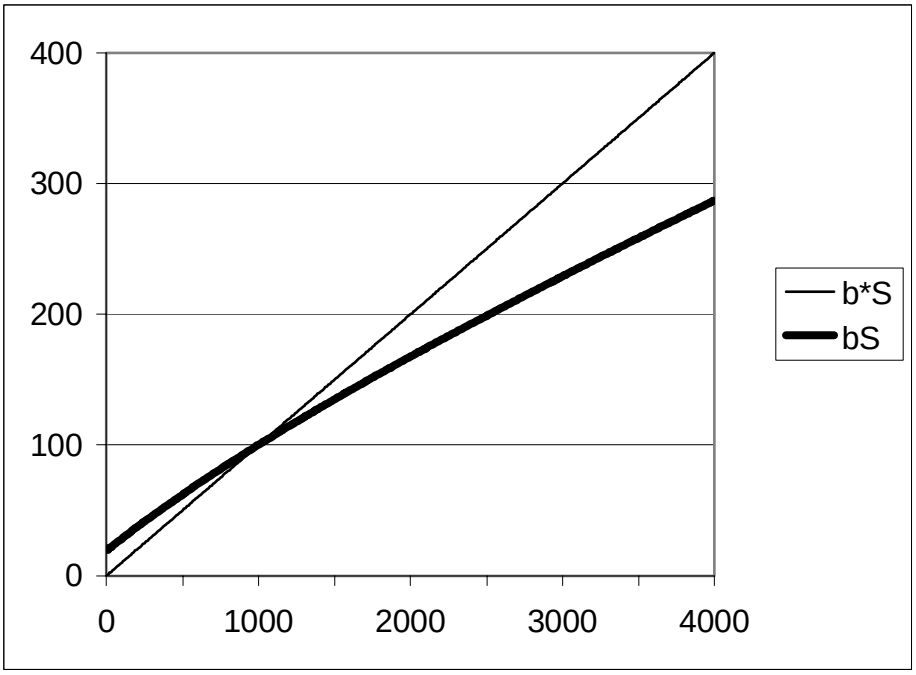
Utiliteettifunktio $v(x)$ antaa likimain $\ln(x)$-utiliteettifunktiota vastaavat panoskoot silloin, kun varallisuus on β:n ympäristössä. Tätä pienemmillä varallisuuksilla panokset ovat suurempia, ja vastaavasti varallisuuden ollessa suurempi kuin β, ovat panokset pienempiä.

Raja-arvo

$$\lim_{S\to\infty} b = \frac{o\sqrt{\frac{p(1-p)}{o-1}} - 1}{o(1-p) - 1}$$

on suuruudeltaan luokkaa $\frac{1}{2}b^*$. (Sivulla 15 käsiteltiin vastaava kasvunopeuden optimoiva panoskoko, $b^* = \frac{po-1}{o-1}$.)

Katsotaan vielä miten utiliteettifunktioilla $v(x)$ ja $\ln(x)$ saadut markkamääräiset panokset eroavat. Kuvassa bS:n ja b^*S:n kuvaajat S:n funktioina, kun $\alpha = 0{,}2$, $\beta = 1000$, $o = 2$ ja $p = 0{,}55$:



7.3.1 Riskien vertailua simuloimalla

Simulointi tarjoaa kätevän keinon verrata utiliteettifunktioiden $v(x)$ ja $\ln(x)$ riskitasoja. Eräs mielenkiintoinen riskin mitta saadaan kysyttäessä todennäköisyyttä, jolla varallisuus kaksinkertaistuu ennen puoliintumista.

Olkoon satunnaismuuttujalla X_i arvo yksi silloin, kun varallisuus kaksinkertaistuu ennen puoliintumista kokeessa i, ja arvo nolla, jos varallisuus puoliintuu ennen kaksinkertaistumista. Tällaisen kokeen simulointi tuottaa otoksen Bernoullin jakaumasta $B(\mu)$,

$$P\{X_i = 0\} = 1 - \mu$$
$$P\{X_i = 1\} = \mu,$$

jonka odotusarvo ja varianssi ovat $E(X_i) = \mu$ ja $D^2(X_i) = \mu(1-\mu)$. Kiinnostava suure on onnistumisten suhteellinen osuus

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,$$

jolle $E(\overline{X}_n) = \mu$ ja $D^2(\overline{X}_n) = \frac{\mu(1-\mu)}{n}$.

Tsebysevin epäyhtälö

$$P\{|X-\mu| \geq k\sigma\} \leq \frac{1}{k^2}, \quad k > 0,$$

joka pätee sellaisille satunnaismuuttujille X, joilla on odotusarvo $E(X) = \mu$ ja varianssi $D^2(X) = \sigma^2 > 0$, antaa valinnalla $k = \varepsilon\sqrt{\frac{n}{\mu(1-\mu)}}$ Bernoullikoesarjaa koskevan epäyhtälön (Tuominen)

$$P\{|\overline{X}_n - \mu| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\mu(1-\mu)}{\varepsilon^2 n},$$

josta saadaan laskettua halutun tarkkuuden saavuttamiseen vaadittavien Bernoulli-kokeiden lukumäärän. Esimerkiksi 99%:n luottamustasolla vähintään yhden prosentin tarkkuuden saavuttamiseen tarvitaan 250 000 koetta, sillä

$$P\{|\overline{X}_n - \mu| \geq 0{,}01\} \leq \frac{\mu(1-\mu)}{0{,}01^2 n} = 1 - 0{,}99$$

$$\Rightarrow n = \max_{\mu \in]0,1[} \frac{\mu(1-\mu)}{(1-0{,}99) * 0{,}01^2} \overset{\mu=0{,}5}{=} \frac{1}{4 * (1-0{,}99) * 0{,}01^2} = 250\,000.$$

Pelattaessa yksittäisiä vetoja, joilla $o = 2$ ja $p = 0{,}55$, tietokonesimulaatio antoi $\ln(x)$ utiliteettifunktiota käyttäen (eli b^* panoksin) 250 000:n kokeen sarjassa todennäköisyydeksi $P\{S_n$ kaksinkertaistuu ennen puoliintumista$\} \approx 67{,}8\%$. (Yksittäinen koe päättyy tässä siihen, kun varallisuus on joko kaksinkertaistunut tai puoliintunut alkutilanteeseen verrattuna.)

Seuraavassa taulukko, jossa vastaavat todennäköisyydet on simuloitu käyttämällä utiliteettifunktiota $v(x)$ erilaisilla parametrien α ja β arvoilla. Alkuvarallisuutena käytettiin arvoa $S_0 = \beta$.

α \ β	1/4	1/2	1	2	4
0,1	75,3%	71,4%	67,7%	64,4%	59,8%
0,2	78,5%	73,3%	67,8%	62,2%	56,2%
0,4	81,0%	75,4%	68,0%	58,9%	53,2%
0,8	82,5%	76,5%	68,3%	58,8%	51,0%

Taulukosta nähdään odotusten mukaisesti, että riskit ovat likimain saman suuruisia varallisuuden ollessa β. Ja varallisuuden kasvaessa riskit pienenevät. Tämän mukaan pelaaja on vastaavasti valmis ottamaan suurempia riskejä silloin, kun varallisuus on pieni. Tämä on luonnollista, sillä hyvin pienen varallisuusaseman ollessa kyseessä, voi summan käytännönhyöty olla jo niin vähäinen, ettei ole juurikaan merkitystä häviääkö pelaaja loputkin jäljellä olevasta varallisuudestaan vai ei. Tällöin olisi joka tapauksessa saatava lisää varallisuutta vedonlyönnin ulkopuolelta, jotta pelin jatkaminen olisi merkityksellistä.

Kirjallisuusluettelo

Cover, Thomas M. & Thomas, Joy A. (1991) Elements of Information Theory. Wiley Series in Telecommunications.

Kelly, J.L., Jr. (1956) A New Interpretation of Information Rate. Bell System Technical Journal, 35, 917-926.

Mäkeläinen, Timo (2000) "Bayesläiset Tilastolliset Menetelmät"-kurssin luentomoniste. Helsingin Yliopisto.

Thorp, Edward O. (1997) The Kelly Criterion in Blackjack, Sports Betting, and the Stock Market. The 10th International Conference on Gambling and Risk Taking.

Tuominen, Pekka (1996) Todennäköisyyslaskenta I. Limes ry.